SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
ISTITUTO MATEMATICO DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

L. ZANGHIRATI

ALCUNI RISULTATI DI PROPAGAZIONE DI REGOLARITA' C^∞ ED IN SPAZI DI GEVREY

26 MAGGIO 1983

Scopo di questo seminario è l'esposizione di un risultato di Hörmander sulla propagazione di regolarità per soluzioni di equazioni a derivate parziali con coefficienti costanti e di alcuni possibili sviluppi.

Il problema si inquadra in quello più generale: sia $P(D)$ $D = (D_1,\dots,D_n)$, $D_j = -i\frac{\partial}{\partial x_j}$ un polinomio differenziale su R^n e siano $X_o \subset X_1 \subset X$ aperti di R^n; si cercano condizioni affinché per un aperto $A \subset X_1$ si abbia:

$$u \in \mathcal{D}'(X),\ u \in C^\infty(X_o),\ P(D)\,u \in C^\infty(X_1) \ \Rightarrow\ u \in C^\infty(A)$$

1. Cominceremo col richiamare alcune definizioni. Se P è un operatore differenziale a coefficienti costanti, poniamo $\tilde{P}(\eta) = (\sum_\alpha |P^{(\alpha)}(\eta)|^2)^{1/2}$ ed indichiamo con $L(P)$ l'insieme dei polinomi $\xi \to Q(\xi)$ tali che per una successione $\eta_\nu \to \infty$ risulta:

$$\frac{P(\xi + \eta_\nu)}{\tilde{P}(\eta_\nu)} \to Q(\xi)$$

Scrivendo i polinomi

$$\xi \to \frac{P(\xi + \eta_\nu)}{\tilde{P}(\eta_\nu)}\ ,\quad \xi \to Q(\xi) \quad \text{nella forma:}$$

$$\frac{P(\xi + \eta_\nu)}{\tilde{P}(\eta_\nu)} = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\,\frac{P^{(\alpha)}(\eta)}{\tilde{P}(\eta)}\,\xi^\alpha\ ;\quad Q(\xi) = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\,Q^{(\alpha)}(o)\,\xi^\alpha,$$

ciò significa che per ogni α è:

$$Q^{(\alpha)}(o) = \lim_{\nu\to\infty} \frac{P^{(\alpha)}(\eta_\nu)}{\tilde{P}(\eta_\nu)} .$$

Gli elementi di $L(P)$ vengono detti "localizzazioni di P all'infinito". Per ogni $Q \in L(P)$ si pone:

$$\Lambda(Q) = \{\eta \in R^n : P(\xi + t\eta) = P(\xi) \ \forall \xi, \forall t\} ,$$

e

$$\Lambda'(Q) = \{x \in R^n : \langle x,\eta \rangle = 0 \quad \forall \eta \in \Lambda(Q)\}$$

$\Lambda(Q)$ è il più grande spazio vettoriale lungo il quale $Q(D)$ è costante e $\Lambda'(Q)$ è il più piccolo sottospazio lungo il quale $Q(D)$ opera.

P è ipoellittico se e solo se tutte le sue localizzazioni sono costanti, quindi per ognuna di esse è $\Lambda'(Q) = \{0\}$. Se P è di tipo principale con parte principale a coefficienti reali, l'insieme $\{\Lambda(Q), Q\in L(P)\}$ è l'insieme delle linee bicaratteristiche di P per l'origine. Questo fatto ha suggerito una estensione della nozione di bicaratteristica.

Si dicono spazi bicaratteristici per l'origine di un polinomio P i sottospazi b di R^n appartenenti a $\overline{\bigcup_{Q\in L(P)} \Lambda'(Q)}$, chiusura secondo la metrica:

$$d(v,w) = \sup_{\substack{x\in v\\ |x|=1}} \ \inf_{\substack{y\in w\\ |y|=1}} |x-y| , \quad v,w \text{ sottospazi di } R^n .$$

Si pone $B_o = \overline{\bigcup_{Q\in L(P)} \Lambda'(Q)}$. Se $x \in R^n$, l'insieme B_x degli "spazi bicaratteristici di P per x" è il traslato di B_o in x.

Il risultato che intendiamo esporre in questa prima parte è il seguente:

1.1 Teorema (Hörmander [2]). Sia P un operatore differenziale tale che ogni $Q \in L(P)$ sia un operatore del primo ordine. Supponiamo inoltre $u \in \mathcal{D}'(X)$ e $P(D)\, u \in C^{\infty}(X)$, dove X è un sottoinsieme aperto di R^n. Allora, se $x \in$ sing supp u (*) esiste un $b \in B_x$ tale che la componente di $b \cap X$ contenente x è un sottoinsieme di sing supp u.

Per la dimostrazione è più conveniente enunciare questo teorema nella seguente forma:

1.2 Teorema. Sia P un operatore differenziale tale che ogni $Q \in L(P)$ sia del primo ordine. Supponiamo $u \in \mathcal{D}'(X)$, $P(D)\, u \in C^{\infty}(X)$ ed $u \in C^{\infty}(X_0)$, dove $X_0 \subset X$ sono sottoinsiemi aperti di R^n. Se $x \in X$ e la componente di $b \cap X$ contenente x interseca X_0 per ogni $b \in B_x$, allora $u \in C^{\infty}$ in un intorno di x.

L'ipotesi che ogni $Q \in L(P)$ sia un operatore del primo ordine equivale a:

$$\frac{P^{(\alpha)}(\eta)}{\tilde{P}(\eta)} \to 0 \qquad \text{quando} \quad \eta \to \infty \qquad \text{se} \quad |\alpha| > 1$$

ed è, per esempio, soddisfatta da ogni prodotto di un operatore ipoellittico e di un operatore con caratteristiche semplici.

La dimostrazione del Teorema 1.2 si fonda su due Proposizioni e su due Lemmi.

1.3 Proposizione [1]. Esistono costanti positive C ed a tali che, se $|\eta|$ è sufficientemente grande:

(*) Si indica con sing supp u l'intersezione di tutti i chiusi, relativamente all'aperto X, al di fuori dei quali $u \in C^{\infty}$.

$$\inf_{Q \in L(P)} \sum_{\alpha} \left| \frac{P^{(\alpha)}(\eta)}{\tilde{P}(\eta)} - Q^{(\alpha)}(o) \right|^2 \leq C^2 |\eta|^{-2a} .$$

1.4 Proposizione [1]. Sia $0 < \rho < 1$. Esiste una partizione dell'unità di R^n:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j = 1 \qquad \text{tale che:}$$

i) $0 \leq \psi_j \in C_0^{\infty}$.

ii) $\psi_j(\xi) = 1$ se $|\xi - \xi_j| \leq c|\xi_j|^{\rho}$

$\psi_j(\xi) = 0$ se $|\xi - \xi_j| \geq C|\xi_j|^{\rho}$

dove $\{\xi_j\} \subset R^n$ è una opportuna successione divergente e c, C sono opportune costanti positive.

iii) $\sup|D^{\alpha} \psi_j| \leq c_{\alpha}|\xi_j|^{-\rho|\alpha|}$ $\quad \forall\alpha$.

1.5 Lemma [2]. Sia $u \in E'(R^n)$ di ordine μ. Posto $\hat{u}_j = \psi_j \hat{u}$, dove $\{\psi_j\}$ è la partizione dell'unità della Proposizione precedente, allora:

$$(1.1) \qquad \sup|u_j| \leq c|\xi_j|^{\mu+n\rho} .$$

Inoltre, se Y è un sottoinsieme aperto di R^n, $u \in C^{\infty}(Y)$ se e solo se per ogni compatto $K \subset Y$ e per ogni intero N:

$$(1.2) \qquad \sup_K |u_j| \leq c_{N,K}|\xi_j|^{-N}$$

1.6 Lemma [2]. Siano $X_0 \subset X$ sottoinsiemi aperti di R^n con $0 \in X$ e sia P un polinomio differenziale tale che ogni $Q \in L(P)$ sia del primo ordine. Supponiamo che per ogni $b \in B_0$ la componente di $b \cap X$ che contiene lo 0, contenga qualche punto di X_0. Allora si possono trovare in siemi compatti $K_o \subset X_o$, $K \subset X$ e costanti $C > 0$ e $\delta \in \,]0,1[$ tali che per ogni $v \in C^\infty(X)$, $Q \in L(P)$ ed h intero positivo, si ha:

$$|v(o)| \leq C^h(\sup_{K_o}|v| + N_h(v))^\delta (\sup_K|v| + N_h(v))^{1-\delta} ,$$

$$N_h(v) = \sum_{|\alpha| \leq h+n+1} \sup_K h^{h-|\alpha|} |D^\alpha Q(D)^h (v)| .$$

Osservazione. Se $\bar{x}$ è tale che $\bar{x} + K_o \subset X_o$, $\bar{x} + K \subset X$, la (1.3) applicata alla funzione $v(x + \bar{x})$ fornisce la stima:

$$|v(\bar{x})| \leq C^h(\sup_{\bar{x}+K_o} |v| + N_h(v))^\delta (\sup_{\bar{x}+K} |v| + N_h(v))^{1-\delta} ,$$

con

$$N_h(v) = \sum_{|\alpha| \leq h+n+1} \sup_{\bar{x}+K} h^{h-|\alpha|} |D^\alpha Q(D)^h v| .$$

Pertanto se V è un intorno compatto e connesso dello 0 tale che $K_o + V$ e $K + V$ siano contenuti in X_o ed X rispettivamente, allora si ha:

$$(1.3)' \qquad \sup_V|v(x)| \leq C^h(\sup_{K_o+V} |v| + N_h(v))^\delta (\sup_{K+V} |v| + N_h(v))^{1-\delta} ,$$

dove ora:

$$N_h(v) = \sum_{|\alpha| \leq h+n+1} \sup_{K+V} h^{h-|\alpha|} |D^\alpha Q(D)^h v| .$$

Tralasciando la dimostrazione delle proposizioni e dei lemmi precedenti diamo la:

Dimostrazione del Teorema 1.2. Osserviamo innanzitutto che X può essere sostituito da un sottoinsieme relativamente compatto sufficientemente grande. Possiamo quindi supporre $u \in E'(R^n)$. Applicheremo il Lemma 1.5 alle distribuzioni u ed $f = P(D)\, u$. Poniamo quindi:

$$\hat{u}_j = \psi_j\, \hat{u} \qquad \text{ed} \qquad \hat{f}_j = \psi_j\, \hat{f} \ .$$

Da $P(D)\, u = f$ segue:

$$(1.4) \qquad P(D)\, u_j = f_j \qquad \text{per ogni } j \ .$$

Posto:

$$v_j(x) = u_j(x)\, e^{-i\langle x,\xi_j\rangle} \ , \quad g_j(x) = f_j(x)\, e^{-i\langle x,\xi_j\rangle}/\tilde{P}(\xi_j) \ ,$$

da (1.4) si ha:

$$(1.5) \qquad \frac{P(D+\xi_j)}{\tilde{P}(\xi_j)}\, v_j = g_j \ .$$

Per la Proposizione 1.3 per ogni j possiamo scegliere un $Q_j \in L(P)$ tanto prossimo a

$$\frac{P(D+\xi_j)}{\tilde{P}(\xi_j)} \qquad \text{che posto:}$$

$$Q_j(D) - \frac{P(D+\xi_j)}{\tilde{P}(\xi_j)} = R_j(D)$$

riesca:

$$(1.6) \qquad \tilde{R}_j(0) \leq C|\xi_j|^{-a}$$

con costanti C ed a positive opportune.

La (1.5) si può dunque scrivere:

$$(Q_j(D) - R_j(D))\, v_j = g_j$$

e, applicando ad entrambi i membri l'operatore $\sum_{\nu=1}^{h} Q_j(D)^{h-\nu} R_j(D)^{\nu-1}$, (h intero positivo):

$$(1.7) \qquad Q_j(D)^h v_j = R_j(D)^h v_j + \sum_{\nu=1}^{h} Q_j(D)^{h-\nu} R_j(D)^{\nu-1} g_j .$$

Possiamo supporre che il punto x nell'enunciato sia l'origine. Allora le ipotesi del Lemma (1.6) sono soddisfatte. Esistono pertanto due compatti K_o e K per i quali vale (1.3). Sia V un intorno compatto e connesso dell'origine tale che $K_o + V$ e $K + V$ siano contenuti in X_o ed X rispettivamente. Potremo allora applicare la stima (1.3)' con $v = v_j$ e $Q = Q_j$. Avremo così per ogni j:

$$(1.8) \qquad \sup_V |v_j| \leq C^h \Big(\sup_{K_o+V} |v_j| + N_h(v_j)\Big)^{\delta} \Big(\sup_{K+V} |v_j| + N_h(v_j)\Big)^{1-\delta} ,$$

dove, tenuto conto di (1.7):

$$(1.9) \qquad N_h(v_j) \leq \sum_{|\alpha| \leq h+n+1} \sup_{K+V} h^{h-|\alpha|} |D^\alpha R_j(D)^h v_j| +$$

$$+ \sum_{|\alpha| \leq h+n+1} \sum_{\nu=1}^{h} \sup_{K+V} h^{h-|\alpha|} |D^\alpha Q_j(D)^{h-\nu} R_j(D)^{\nu-1} g_j| .$$

Poiché $u \in C^\infty(X_o)$, per il Lemma 1.5, u_j, e quindi anche v_j, è $O(|\xi_j|^{-N})$ per ogni N, su $K_o + V$, ed è $O(|\xi_j|^{\mu+\rho n})$ su $K + V$, se μ è l'ordine di u.

Per valutare $N_h(v_j)$ osserviamo che, essendo $f \in C^\infty(X)$, $D^\alpha f_j = (D^\alpha f)_j$; è $O(|\xi_j|^{-N})$ per ogni N su $K + V$. Ne segue che tale è pure ogni derivata di g_j, sicché la seconda sommatoria in (1.9) si maggiora con $c_{h,N}|\xi_j|^{-N}$ per ogni N. Quanto alla prima, si osservi che da $\hat{v}_j(\xi) = (\psi_j\ \hat{u})\ (\xi - \xi_j)$ e dalla ii) della Proposizione 1.4 segue che $\hat{v}_j$ ha supporto nella sfera con centro l'origine e raggio $C|\xi_j|^\rho$. Quindi v_j è una funzione esponenziale di tipo $C|\xi_j|^\rho$. Poiché, inoltre, v_j soddisfa (1.1), dalla diseguaglianza di Bernstein segue che, per ogni α,

$$|D^\alpha\ v_j| \leq c_\alpha\ |\xi_j|^{\mu+\rho n+\rho|\alpha|}$$

Quindi, tenuto conto della (1.6) la prima sommatoria di (1.9) si maggiora con $c_h|\xi_j|^{\mu+2\rho n+\rho}\ |\xi_j|^{h((m+1)\rho-a)}$.

Se ora si sceglie ρ in modo che $(m+1)\ \rho - a < -\frac{a}{2}$, tale somma si maggiora con $c_h|\xi_j|^{-h\ a/2 + h_o}$, $h_o = \mu + 2\rho n + \rho$.

Concludendo la (1.9) dà con la scelta fatta per ρ:

$$\sup_V|v_j| \leq c_h(|\xi_j|^{-h\ a/2 + h_o})^\delta\ (|\xi_j|^{\mu+\rho n})^{1-\delta}\ .$$

Ora per ogni fissato N si potrà scegliere h in modo da avere:

$$\sup_V|v_j| \leq c_N|\xi_j|^{-N}$$

e ciò, in vista del Lemma 1.5, completa la dimostrazione del Teorema.

2. In questa seconda parte presentiamo alcuni risultati di propagazione di regolarità Gevrey del tipo di quelli or ora esposti.

Indichiamo con $G^{(\sigma)}(X)$, $\sigma > 1$, l'usuale spazio di Gevrey di ordine σ su X, con $G_0^{(\sigma)}(X)$, $G^{(\sigma)}(X) \cap C_0^\infty(X)$ e con $G_0^{(\sigma)}{}'(X)$, $G^{(\sigma)}{}'(X)$ i duali di $G_0^{(\sigma)}(X)$ e $G^{(\sigma)}(X)$ rispettivamente.

E' possibile provare il seguente teorema, nel quale le ipotesi sull'operatore P sono le stesse che nel teorema 1.2.

2.1 Teorema. Sia P un operatore differenziale tale che ogni $Q \in L(P)$ sia del primo ordine siano $X_0 \subset X$ due sottoinsiemi aperti di R^n. Esiste un $\sigma_0 > 1$ tale che se $\sigma > \sigma_0$, $u \in G_0^{(\sigma)}{}'(X)$, $P(D)\, u \in G^{(\sigma)}(X)$ ed $u \in G^{(\sigma)}(X_0)$, allora $u \in G^{(\sigma)}$ in un intorno di ogni punto x tale che per ogni punto $b \in B_X$ la componente di $b \cap X$ contenente x interseca X_0.

La dimostrazione di questo teorema si fonda sulla Prop. 1.3, sul Lemma 1.6 e su una proposizione ed un lemma analoghi rispettivamente alla Prop. 1.4 ed al Lemma 1.5 ma relativi a funzioni appartenenti a spazi di Gevrey.

2.2 Proposizione. Sia $\sigma > 1$, $\frac{1}{\sigma} < \rho < 1$. Esiste una partizione dell'unità in R^n: $\psi_j = 1$ tale che:

i) $0 \leq \psi_j \quad G_0^{(\rho\, \sigma)}(R^n)$,

ii) $\psi_j(\xi) = 1$ se $|\xi - \xi_j| \leq c|\xi_j|^\rho$
$\psi_j(\xi) = 0$ se $|\xi - \xi_j| \geq C|\xi_j|^\rho$,
dove $\{\xi_j\} \subset R^n$ è una opportuna successione divergente e c, C sono costanti positive;

iii) $|D^\alpha \psi_j| \leq c_0^{|\alpha|+1} \; |\xi_j|^{-\rho|\alpha|} \; |\alpha|^{|\alpha|\, \rho\, \sigma}, \qquad a \in N^n$.

2.3 Lemma. Sia $u \in G^{(\sigma)}{}'(R^n)$ $\sigma > 1$. Posto $\hat{u}_j = \psi_j\, \hat{u}$, dove $\{\psi_j\}$ è la partizione dell'unità della Prop. 2.2, allora per ogni $b > 0$ esiste una costante $c(b)$ tale che:

$$\sup|u_j| \leq c(b)\, e^{b|\xi_j|^{1/\sigma}}. \tag{2.1}$$

Inoltre, se Y è un sottoinsieme aperto di R^n, u $G^{\sigma}(Y)$ se e solo se per ogni compatto $K \subset Y$ esistono costanti a_k e b_k tali che:

$$\sup_K |u_j| \leq a_k \, e^{-b_k |\xi_j|^{1/\sigma}} \tag{2.2}$$

In tal caso:

$$\sup_K |D^{\alpha} u_j| \leq a_k \, c^{|\alpha|} \, |\xi_j|^{|\alpha|} \, e^{-b_k |\xi_j|^{1/\sigma}} \tag{2.3}$$

<u>Cenno della dimostrazione del Teorema 2.1</u>. Siano u_j, f_j, v_j, g_j definite come nella dimostrazione del Teorema 1.2. Supponiamo, come è lecito, x = 0. Le ipotesi del Lemma 1.6 sono soddisfatte onde, scelto un intorno V dell'origine come nel Teorema 1.2, si avrà per $\sup_V |v_j|$ la stima (1.8) con $N_h(v_j)$ maggiorato come in (1.9).

Per il Lemma 2.2, v_j è $O(e^{-b_0|\xi_j|^{1/\sigma}})$ su $K_0 + V$, mentre è $O(e^{b|\xi_j|^{1/\sigma}})$ per ogni $b > 0$ su K + V. Inoltre, ogni derivata $D^{\gamma} f_j$ si maggiora su K + V con $c^{|\gamma|+1} \, |\xi_j|^{|\gamma|} \, e^{-b_1|\xi_j|^{1/\sigma}}$. Altrettanto è per ogni $D^{\gamma} g_j$. Pertanto la seconda somma in (1.9) è stimata da
$C^{h+1} \, h^h \, |\xi_j|^{h(m+1)} \, e^{-b_1|\xi_j|^{1/\sigma}}$.

Quanto alla prima, osserviamo che, essendo v_j una funzione esponenziale di tipo $c|\xi_j|^{\rho}$ e valendo la (2.1), si ha per ogni $b > 0$:
$|D^{\gamma} v_j| \leq c(b) \, c^{|\gamma|} \, |\xi_j|^{\rho|\gamma|} \, e^{b|\xi_j|^{1/\sigma}}$. Quindi, tenunto conto di (1.6), la prima somma in (1.9) è stimata da $C^h \, c(b) \, h^h \, |\xi_j|^{h\,(m+1)\rho-a} \, e^{b|\xi_j|^{1/\sigma}}$.

Le considerazioni precedenti consentono di ottenere da (1.8):

$$\begin{aligned} \sup_V |v_j| \leq C^h [& c_0 \, e^{-b_0|\xi_j|^{1/\sigma}} + c(b) \, h^h |\xi_j|^{h\,[(m+1)\rho-a]} \, e^{b|\xi_j|^{1/\sigma}} + \\ & + c_1 h^h |\xi_j|^{h(m+1)} e^{-b_1|\xi_j|^{1/\sigma}}]^{\delta} \; . \; [\, c(b) \, e^{b|\xi_j|^{1/\sigma}} + \\ & + c(b) \, h^h |\xi_j|^{h\,[(m+1)\rho-a]} \, e^{b|\xi_j|^{1/\sigma}} + c_1 h^h |\xi_j|^{h(m+1)} e^{-b_1|\xi_j|^{1/\sigma}}]^{1-\delta} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Proveremo che se σ è sufficientemente grande è possibile scegliere h e $\rho \in]1/\sigma,1[$ in modo da dedurre da (3.7) che $\sup_V |v_j|$ è $O(e^{-b'|\xi_j|^{1/\sigma}})$ per un $b' > 0$. Potremo allora concludere, per il Lemma (2.4), che $u \in G^{(\sigma)}(V)$.

Scrivendo $h^h|\xi_j|^{h(m+1)} e^{-b_1|\xi_j|^{1/\sigma}}$ nella forma $e^{h\,\lg h+(m+1)h\,\lg|\xi_j|-b_1|\xi_j|^{1/\sigma}}$, siamo indotti a scegliere

$$h = \left[\frac{\varepsilon_0|\xi_j|^{1/\sigma}}{\lg|\xi_j|}\right] \quad \text{con} \quad \varepsilon_0 = \frac{b_1}{2(m+1)} .$$

In tal modo il termine considerato risulta $O(e^{-b_2|\xi_j|^{1/\sigma}})$, $b_2 > 0$. Inoltre supposto $\varepsilon_0 < \lg|\xi_j|$, si ha:

$$(2.5) \quad h^h|\xi_j|^{h[(m+1)\rho-a]} e^{b|\xi_j|^{1/\sigma}} \leq c(b)|\xi_j|^{1/\sigma+(m+1)\rho-a\ h} e^{b|\xi_j|^{1/\sigma}} .$$

Affinché il secondo membro riesca $O(e^{-b|\xi_j|^{1/\sigma}})$ per un $b > 0$, occorre che sia $\frac{1}{\sigma} + (m+1)\rho - a < 0$. A tal fine scegliamo $\rho < \frac{a - 1/\sigma}{m + 1}$. Perché deve essere $\rho > 1/\sigma$ (Cfr. Prop. 2.2), ciò richiede che sia $\sigma > \frac{m + 2}{a} = \sigma_0$. Supposto dunque $\sigma > \sigma_0$ e fissato ρ nell'intervallo $]1/\sigma, \frac{a + 1/\sigma}{m + 1}[$, il secondo membro di (2.5) si rende $O(e^{-b_2|\xi_j|^{1/\sigma}})$ prendendo b sufficientemente piccolo.

Concludendo, da (2.4), con le scelte fatte per h e per ρ, segue:

$$\sup_V |v_j| \leq c(\varepsilon)\, e^{\varepsilon|\xi_j|^{1/\sigma}} (c\, e^{-b_3|\xi_j|^{1/\sigma}})^{\delta} (c(b)\, e^{b|\xi_j|^{1/\sigma}})^{1-\delta} .$$

Quindi, per l'arbitrarietà di b e di ε, $\sup_V |v_j|$ risulta $O(e^{-b'|\xi_j|^{1/\sigma}})$, $b' = b_3\,\sigma/2$.

Il Teorema 2.1 rimane valido se si sostituisce a $G^{(\sigma)}(X)$, $G_0^{(\sigma)'}(X)$, rispettivamente $\gamma^{(\sigma)}(X)$, $\gamma_0^{(\sigma)'}(X)$, avendo indicato con $\gamma^{(\sigma)}(X)$ lo spazio delle funzioni $u \in C^\infty(X)$ tali che per ogni compatto $K \subset X$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una costante $c_{k,\varepsilon}$ per cui: $\sup_K|D^\alpha u| \leq c_{k,\varepsilon}\, \varepsilon^{-|\alpha|} |\alpha|^{|\alpha|\sigma}$ per ogni $\alpha \in N^n$. $\gamma_0^{(\sigma)}$ sarà poi $\gamma^{(\sigma)} \cap C_0^\infty$ e $\gamma_0^{(\sigma)'}$, $\gamma^{(\sigma)'}$ i duali di $\gamma_0^{(\sigma)}$, $\gamma^{(\sigma)}$ rispettivamente.

Per la dimostrazione si dovranno utilizzare in luogo della Proposizione 2.2 e del Lemma 2.3 i seguenti:

2.4. Proposizione. Sia $\sigma > 1$ e $\rho \in]\frac{1}{\sigma}, 1[$. Esiste una partizione dell'unità:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j = 1 \quad \text{in } R^n \qquad \text{tale che:}$$

i) $0 \leqq \psi_j \in \gamma_0^{(\rho\sigma)}(R^n)$;

ii) $\psi_j(\xi) = 1$ se $|\xi - \xi_j| \leq c|\xi_j|^\rho$

$\psi_j(\xi) = 0$ se $|\xi - \xi_j| \geqq C|\xi_j|^\rho$

dove $\{\xi_j\} \subset R^n$ è una opportuna successione divergente e c, C sono costanti positive;

iii) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $C(\varepsilon) > 0$ tale che:

$\sup|D^\alpha \psi_j| \leqq C(\varepsilon)\, \varepsilon^{|\alpha|} |\xi_j|^{-\rho|\alpha|} |\alpha|^{\rho\sigma|\alpha|}, \qquad \alpha \in N^u.$

2.5 Lemma. Sia $u \in \gamma^{(\sigma)'}(R^n)$ $\sigma > 1$. Posto $\hat{u}_j = \psi_j \hat{u}$, dove $\{\psi_j\}$ è la partizione dell'unità della Proposizione 2.4, allora:

$$\sup|u_j| \leqq c\, e^{b|\xi_j|^{1/\sigma}} \qquad c,b > 0$$

Inoltre, se Y è un sottoinsieme aperto di R^n, $u \in \gamma^{(\sigma)}(Y)$ se e solo se per ogni compatto $K \subset Y$ e per ogni $b > 0$ esiste una costante $c_{k,b}$ tale che:

$$\sup_K |u_j| \leq c_{k,b}\, e^{-b|\xi_j|^{1/\sigma}}$$

In tal caso:

$$\sup_K |D^\alpha u_j| \leq c_{k,b}\, c^{|\alpha|}\, |\xi_j|^{|\alpha|}\, e^{-b|\xi_j|^{1/\sigma}} .$$

<u>BIBLIOGRAFIA</u>

[1] HÖRMANDER L.: On the singularities of solutions of partial differential Equations, Comm. Pure Appl. Math., 23, (1970), 329, 358.

[2] HÖRMANDER L.: On the existence and the regularity of solutions of linear pseudo differenzial equations, Enseig. Math., 17, (1971), 99, 163.